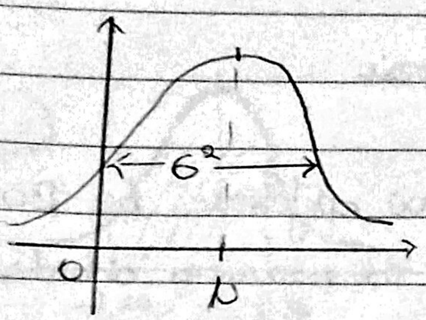
30/11/2017

Κανονική Κατανομή

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad \sigma^2 > 0$$



Αναλλοίωτο καν. κατ.

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε κ $Y = \alpha x + \beta \ (\alpha \neq 0)$

$Y \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$

↓ ΤΥΠΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Αν $\alpha = \frac{1}{\sigma}$, $\beta = -\frac{\mu}{\sigma}$

Πόρισμα:

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

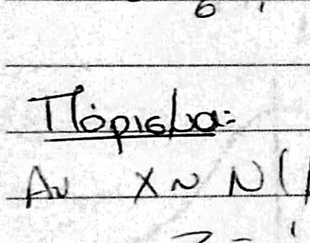
τότε $Z = \frac{1}{\sigma} X - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

ΤΥΠΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Παρατήρηση: $N(0,1)$ ← κορυφαίο ρόλο αφού κάθε κανονική μπορεί να μετατραπεί σε $N(0,1)$

ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΝ. ΚΑΤ. : Η κανονική κατανομή για $\mu = 0$ $\sigma^2 = 1$.

σ.π.π: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$



α.σ.κ. της $N(0,1)$

$F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \le x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$$

Δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή

Άρα η Φ δεν υπάρχει σε αναλυτική μορφή.

Πρόβλημα: Δεν μπορώ να υπολογίσω πιθ. που ορίζονται με βάση για τ.μ. $Z \sim N(0,1)$ αφού $\nexists$ το παρακάτω ολοκλήρωμα σε κλειστή μορφή: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = P(a \le Z \le b)$

Απάντηση: στο πρόβλημα δίνουν πίνακες που υπάρχουν για υπολογισμό πιθανοτήτων βάσει $Z \sim N(0,1)$

Χρήση Πινάκων της $N(0,1)$

Ο πίνακας δίνει πιθ. της μορφής $P(0 \le Z \le z)$

γνωστό z

Παράδ. $Z \sim N(0,1)$

Δεν με απασχολεί αν είναι ανισότητα ή ανισοϊσότητα!

i) $P(0 < Z \le 0{,}75)$

ii) $P(0{,}4 \le Z < 1{,}46)$

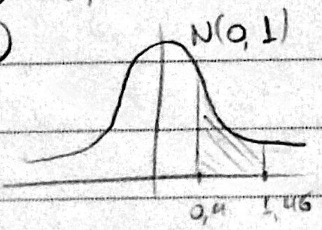
iii) $P(-0{,}7 < Z < -0{,}25)$

iv) $P(-1{,}24 \le Z \le 0{,}36)$

v) $P(Z > 1{,}12)$

vi) $P(Z < -0{,}98)$

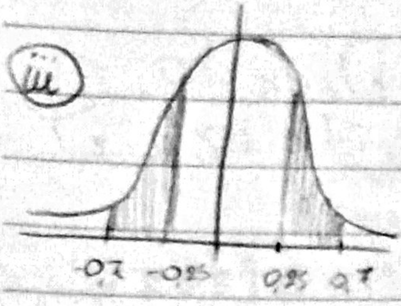
i) 0,2734 (Από τον πίνακα κον. κατ.)

ii) 

$P(0{,}4 \le Z < 1{,}46) = P(0 < Z < 1{,}46) - P(0 < Z \le 0{,}4)$

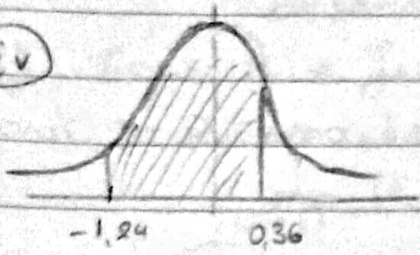
$= 0{,}4279 - 0{,}1554 = 0{,}2825.$

(iii)



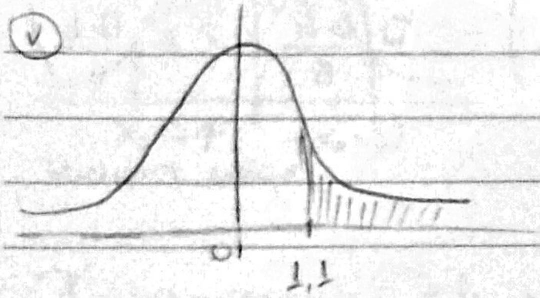
$P(-0{,}7<Z<-0{,}25)=$
$=P(0{,}25<Z<0{,}7)$
$=P(0<Z<0{,}7)-P(0<Z<0{,}25)$
$=0{,}2580-0{,}0987$
$=0{,}1593$

(iv)



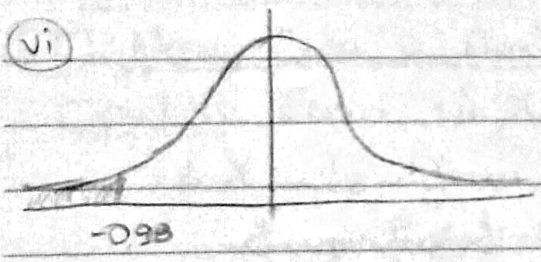
$P(-1{,}24<z<0{,}36)=$
$=P(0<z<36)+P(0<z<1{,}24)=$
$=0{,}1406+0{,}3925$
$=0{,}5331$

(v)



$P(z>1{,}12)$
$=1-P(-\infty<z<1{,}12)$
$=1-[0{,}5+P(0<z<1{,}12)]$
$=0{,}5-0{,}3686\ldots$

(vi)



$P(z<-0{,}98)$
$=P(z>0{,}98)$
$=1-P(-\infty<z<0{,}98)$
$=\ldots$

ΑΝΤΙΣΡΟΦΗ ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

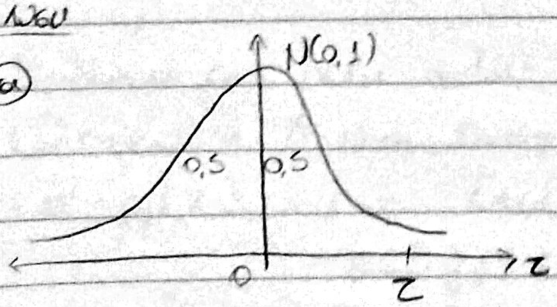
Παράδειγμα: Αν $Z \sim N(0,1)$. Να βρεθεί $z\in\mathbb{R}$ τ.ω.:

(α) $P(Z\le z)=0{,}95$

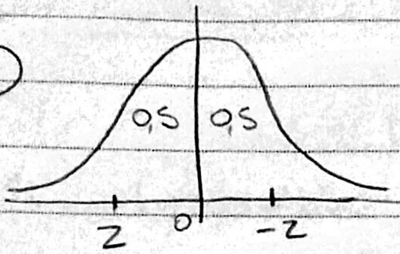
(β) $P(Z\ge z)=0{,}6772$

Λύση

(α)



$0{,}95=P(Z\le z)=$
$P(-\infty<Z\le 0)+P(0<Z\le z)=$
$0{,}5+P(0<Z\le z)$
$\Rightarrow P(0<Z\le z)=0{,}45$
$\Downarrow$ στο πίνακα
$z=1{,}64$

(β) 

$$P(Z \geq z) = P(Z \leq -z)$$
$$= P(-\infty < Z < 0) + P(0 < Z < -z)$$
$$= 0{,}5 + P(0 < Z < -z)$$
$$\Rightarrow P(0 < Z < -z) = 0{,}1772$$
$\Downarrow$ από πίνακα
$$-z = 0{,}46$$
$$\Rightarrow z = -0{,}46$$

<u>Ερώτηση</u>: Πως υπολογίζω πιθανότητες σε οποιαδήποτε κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$? Δηλ. αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε
$P(\alpha \leq X \leq \beta) = ?$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

<u>απάντηση</u>

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)$$

↑ χρήση πινάκων

$Z \sim N(0,1)$

<u>Παράδειγμα:</u>

Επίδοση σε ένα μάθημα $\sim N(5,1)$

(α) P(η επίδοση φοιτητή να είναι μεταξύ 4 και 6)

(β) Αν είναι γνωστό ότι η επίδοση είναι μεγαλύτερη 5 P(να είναι μεγαλύτερη των 6)

(γ) Ποια τουλάχιστον επίδοση περιμένουμε να συμβεί με πιθανότητα 0,9?

<u>Λύση</u>

Έστω X επίδοση, $X \sim N(5,1)$

(α) $P(4 \leq X \leq 6)$

τύπος μετασχ. $= P\left(\frac{4-5}{1} \leq \frac{X-5}{1} \leq \frac{6-5}{1}\right)$

$= P(-1 \leq Z \leq 1)$, $Z \sim N(0,1)$

$= 2P(0 \leq Z \leq 1) = 2 * 0{,}3413 = 0{,}6826$

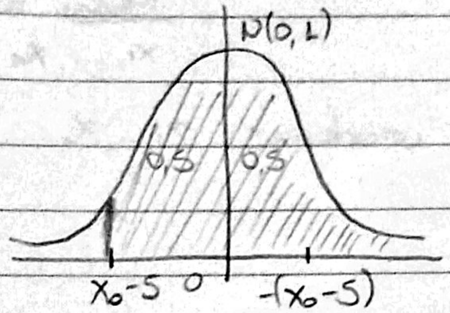
(β) $P(X>6 \mid X>5)$

$$= \frac{P(X>6 \text{ κ' } X>5)}{P(X>5)} = \frac{P(X>6)}{P(X>5)}$$

$$= \frac{P\left(\frac{X-5}{1} > \frac{6-5}{1}\right)}{P\left(\frac{X-5}{1} > \frac{5-5}{1}\right)} = \frac{P(Z>1)}{P(Z>0)} = \ldots$$

(γ) Έστω x_0 η ζητούμενη επίδοση

$$0{,}9 = P(X \geq x_0) = P\left(\frac{X-5}{1} \geq \frac{x_0-5}{1}\right) \overset{Z}{\underset{N(0,1)}{=}} P(Z \geq x_0-5) =$$



$$= P(Z \leq -(x_0-5))$$

$$= 0{,}5 + P(0 < Z < -(x_0-5))$$

$$\Rightarrow P(0<Z<-(x_0-5)) = 0{,}4$$

$\Downarrow$ από πίνακα

$$-(x_0-5) = 1{,}28 \Rightarrow x_0 = 3{,}72$$

Χαρακτηριστικά τ.μ. και κατανομών

(I) Μέση Τιμή ή Αναμενόμενη Τιμή τ.μ.

Ορισμός: Έστω τ.μ. X. Η μέση τιμή ή η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X συμβολίζεται με μ ή $E(X)$ και ορίζεται:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_x x\, p_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η μ υπάρχει αν συγκλίνει το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα.

Ερμηνεία στη μέση τιμή:

(1) Έστω η X είναι διακριτή με τιμές $x_1, \ldots, x_n$ και σπ $p_X(x_i)$, $i=1,\ldots,n$. Έστω $X_{min} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$

$X_{max} = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_X(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} X_{min}\, p_X(x_i) = X_{min} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i)}_{1} = X_{min} \quad ⊛$$

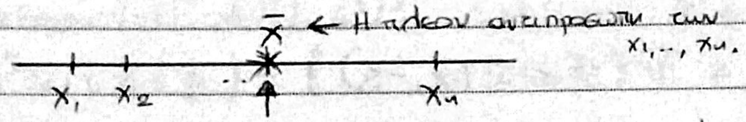
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} x_{max}\, p_X(x) = x_{max} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i)}^{1} = x_{max} \quad (**)$$

$$\left.\begin{matrix} (*) \\ (**) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \boxed{x_{min} \le E(X) \le x_{max}}$$

II Έστω X τ.μ. με τιμές $x_1, \dots, x_n$ και $p_X(x) = \frac{1}{n}$, $i = 1, \dots, n$
(Ομοιόμορφη Διακριτή Κατανομή)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$$

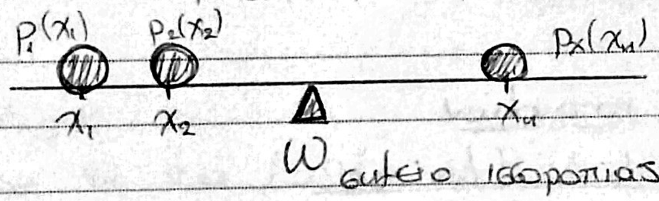
(Αριθμητικός Μέσος των $x_1, \dots, x_n$)



Τιμή που εκπροσωπεί όλες τις υποψήφιες $x_1, \dots, x_n$

$$E(X) = p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2) + \dots + p_X(x_n) \cdot x_n$$

III Σύνδεση μέσης τιμής με το κέντρο βάρους



Μέση Τιμή $= E(X) = \omega =$ Κέντρο Βάρους

Ολική Ροπή Στρέψης $= 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - \omega)\, p_X(x_i) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_X(x_i) \overset{\text{ορ}}{=} E(X)}$

Παράδειγμα: Ζάρι → 2 φορές, X = άθροισ. αποτελ.
Y = Απόλυτη Τιμή Διαφ. Αποτελ.

$E(X)$, $E(Y)$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = \sum_{x=2}^{12} x\, p_X(x) = 7$$

y	0	1	2	3	4	5
$p_Y(y)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{5} y\, p_Y(y) = 1{,}944\ldots$$